

Wojewódzki Konkurs Matematyczny dla uczniów gimnazjów

rok szkolny 2016/2017

Etap III – etap wojewódzki- klucz odpowiedzi

W kluczu przedstawiono przykładowe rozwiązania oraz prawidłowe odpowiedzi.

Za każdą inną poprawną metodę rozwiązania zadania uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 1. (0-1) B

Pewien prostopadłościan, którego długości wszystkich krawędzi wyrażają się liczbami naturalnymi, ma objętość 48. Obwód jego podstawy wynosi 22. Wysokość prostopadłościanu ma długość:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Przykładowe rozwiązanie:

$$abh=48$$

$$2a+2b=22 / : 2$$

$$a+b=11$$

Tworzymy tabelkę, w której liczby z dwóch pierwszych wierszy dają sumę 11. Następnie sprawdzamy, kiedy iloczyn przy danych dwóch liczbach naturalnych wyniesie 48.

a	1	2	3	4	5
b	10	9	8	7	6
h	x	x	2	x	x

Zadanie 2. (0-1) C

Rowerzysta podjeżdża na wzniesienie ze stałą prędkością v , a później wraca tą samą drogą do miejsca, z którego wyruszył, ze stałą prędkością $3v$. Prędkość średnia na drodze tam i z powrotem jest równa:

A. $\frac{3}{4}v$

B. $\frac{4}{3}v$

C. $\frac{3}{2}v$

D. $2v$

Przykładowe rozwiązanie:

$$v_{\text{sr}} = \frac{2v \cdot 3v}{v + 3v} = 1.5v$$

Zadanie 3. (0-2)

Suma dwóch liczb jest równa 57 460. Jeśli za ostatnią cyfrą pierwszej liczby dopiszemy 92, to otrzymamy drugą liczbę. Znajdź te liczby.

Przykładowe rozwiązanie:

x- pierwsza liczba

100x+92- druga liczba

Wówczas: $x+100x+92=57\,460$,

stąd $x=568$

Odp. 568 i 56 892.

Schemat oceniania:

1pkt. za zapisanie równania

1pkt. za podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 4. (0-3)

Wykaż, że wyrażenie $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} + 5^{n+3}$ jest podzielne przez 195, jeśli n jest liczbą naturalną dodatnią.

Przykładowe rozwiązanie:

$$\begin{aligned}5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} + 5^{n+3} &= 5^n + 5 \cdot 5^n + 5^2 \cdot 5^n + 5^3 \cdot 5^n = 5^n + 5 \cdot 5^n + 25 \cdot 5^n + 125 \cdot 5^n = \\ &= 5^n(1 + 5 + 25 + 125) = 156 \cdot 5^n = 156 \cdot 5 \cdot 5^{n-1} = 39 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5^{n-1} = 195 \cdot 4 \cdot 5^{n-1} = 195k,\end{aligned}$$

gdzie k jest liczbą naturalną dodatnią

Schemat oceniania:

Zastosowanie własności potęg o tej samej podstawie – **1 pkt.**

$$5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} + 5^{n+3} = 5^n + 5 \cdot 5^n + 5^2 \cdot 5^n + 5^3 \cdot 5^n = 5^n + 5 \cdot 5^n + 25 \cdot 5^n + 125 \cdot 5^n$$

Wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias - **1 pkt.**

$$5^n(1 + 5 + 25 + 125) = 5^n \cdot 156$$

Przedstawienie iloczynu w postaci, gdy jednym z czynników jest 195 oraz zapisanie, że liczba k (lub iloczyn $5^{n-1} \cdot 4$) jest naturalna dodatnia -**1 pkt.**

$$5^n \cdot 156 = 5^{n-1} \cdot 5 \cdot 156 = 5^{n-1} \cdot 5 \cdot 39 \cdot 4 = 5^{n-1} \cdot 4 \cdot 195 = 195k$$

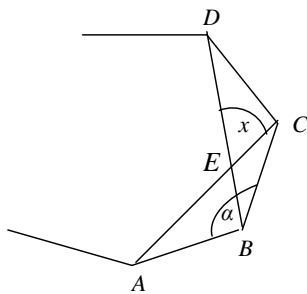
Uwaga

Gdy zdający sprawdza jedynie prawdziwość wyrażenia dla konkretnych liczb n , to otrzymuje 0 punktów.

Zadanie 5. (0-3)

Punkty A, B, C i D są kolejnymi wierzchołkami pewnego wielokąta foremnego, którego kąt wewnętrzny ma miarę α . Jaką miarę ma kąt ostry x między przekątnymi AC i BD tego wielokąta?

Przykładowe rozwiązanie:



Kąt ostry między przekątnymi oznaczmy literą x .

Ponieważ wielokąt jest foremny, to $|AB| = |BC| = |CD| = a$

Stąd wynika, że trójkąty ABC i BCD są równoramienne. Ponadto ramiona jednego są równe ramionom drugiego (długość a) i kąty między ramionami w obydwu mają tę samą miarę (α), czyli trójkąty te są przystające z cechy (b,k,b).

W trójkątach równoramiennych kąty przy podstawach mają równe miary: y .

W trójkącie BEC kąty przy boku BC $|\sphericalangle EBC| = |\sphericalangle ECB| = y$, stąd kąt przy wierzchołku E ma miarę $|\sphericalangle BEC| = 180^\circ - 2y$. Kąt ten jest przyległy do kąta x . Stąd kąt $x = 2y$.

W trójkącie ABC kąt α ma miarę $180^\circ - 2y$. Stąd, że $2y = 180^\circ - \alpha$.

Zatem: $x = 180^\circ - \alpha$.

Schemat oceniania:

1pkt. za uzasadnienie przystawania trójkątów ABC i BCD

1pkt. za wyznaczenie miary kąta $\sphericalangle BEC$ w trójkącie BEC

1pkt. za ustalenie miary kąta x

Zadanie 6. (0-3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie postaci $4x(x+5) - 8x + 10$ przyjmuje zawsze wartość dodatnią.

Przykładowe rozwiązanie:

$$4x(x+5) - 8x + 10 = 4x^2 + 20x - 8x + 10 = 4x^2 + 12x + 10 = (4x^2 + 12x + 9) + 1 = (2x+3)^2 + 1$$

Schemat oceniania:

1 pkt. za zapisanie wyrażenia w postaci $4x^2 + 12x + 10$

1 pkt. za zapisanie wyrażenia w postaci $(2x+3)^2 + 1$

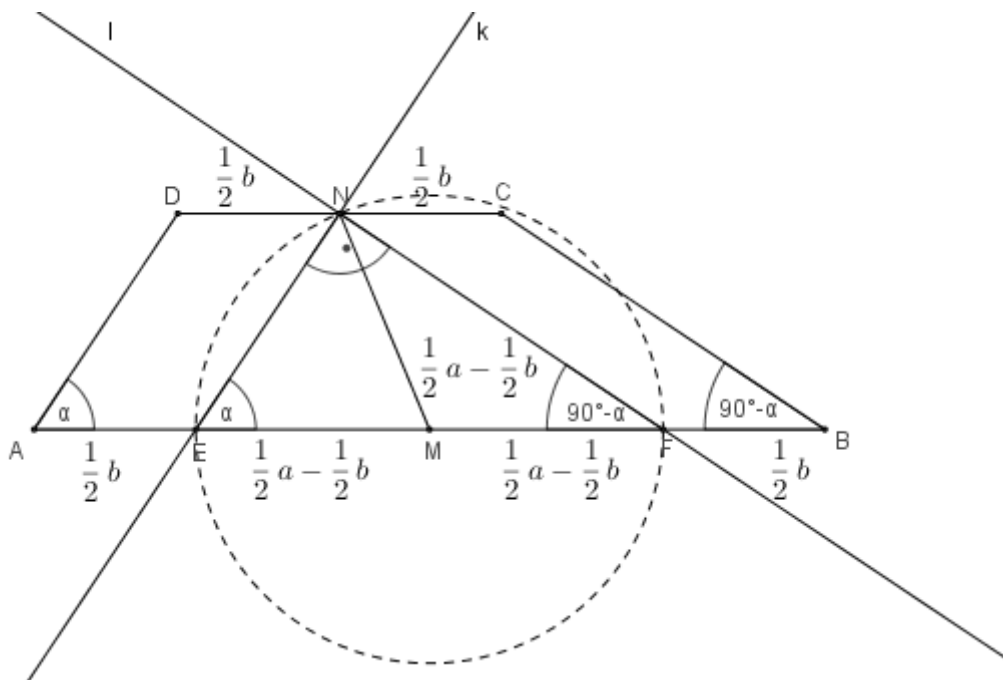
1 pkt. za zapisanie, że wyrażenie $4x(x+5) - 8x + 10$ przyjmuje wartość dodatnią, gdyż zostało zapisane w postaci sumy kwadratu liczby (czyli jest liczbą nieujemną) i liczby 1.

Uwaga

Gdy zdający sprawdza jedynie prawdziwość wyrażenia dla konkretnych liczb x , to otrzymuje 0 punktów.

Zadanie 7. (0-3)

W trapezie $ABCD$ (rysunek poniżej), podstawy mają długość: $|AB| = a$ i $|CD| = b$, gdzie $a > b > 0$. Suma miar kątów przy podstawie AB jest równa 90° . Środek M podstawy AB połączono ze środkiem N podstawy CD . Wykaż, że $|MN| = \frac{a-b}{2}$.

Przykładowe rozwiązanie:

Punkty M i N dzielą każdą z podstaw trapezu na odcinki równej długości:

$$|AM| = |MB| = \frac{1}{2}a \text{ oraz } |DN| = |NC| = \frac{1}{2}b.$$

Suma miar kątów przy podstawie AB jest równa 90° , zatem jeśli $|\sphericalangle BAD| = \alpha$, to $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - \alpha$

Jeśli przez punkt N poprowadzimy proste równoległe do ramion trapezu, to wyznaczą one na podstawie AB takie dwa punkty E i F , że :

$$|AE| = \frac{1}{2}b \text{ i } |EM| = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \text{ oraz } |FB| = \frac{1}{2}b \text{ i } |MF| = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$

Miara kąta przy wierzchołku N w trójkącie ENF :

$$|\sphericalangle ENF| = 180^\circ - [|\sphericalangle FEN| + |\sphericalangle EFN|] = 180^\circ - [\alpha + (90^\circ - \alpha)] = 90^\circ$$

Punkt M jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ENF , zatem:

$$|MN| = |EM| = |MF| = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{a-b}{2}$$

Schemat oceniania:

Za zauważenie, że jeśli przez punkt N poprowadzimy proste równoległe do ramion trapezu, to wyznaczą one na podstawie AB takie dwa punkty E i F , że :

$$|AE| = \frac{1}{2}b \text{ i } |EM| = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \text{ oraz } |FB| = \frac{1}{2}b \text{ i } |MF| = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \quad \text{- 1 pkt.}$$

Za wyznaczenie miary kąta przy wierzchołku N w trójkącie ENF :

$$|\sphericalangle ENF| = 180^\circ - [|\sphericalangle FEN| + |\sphericalangle EFN|] = 180^\circ - [\alpha + (90^\circ - \alpha)] = 90^\circ \quad \text{- 1 pkt.}$$

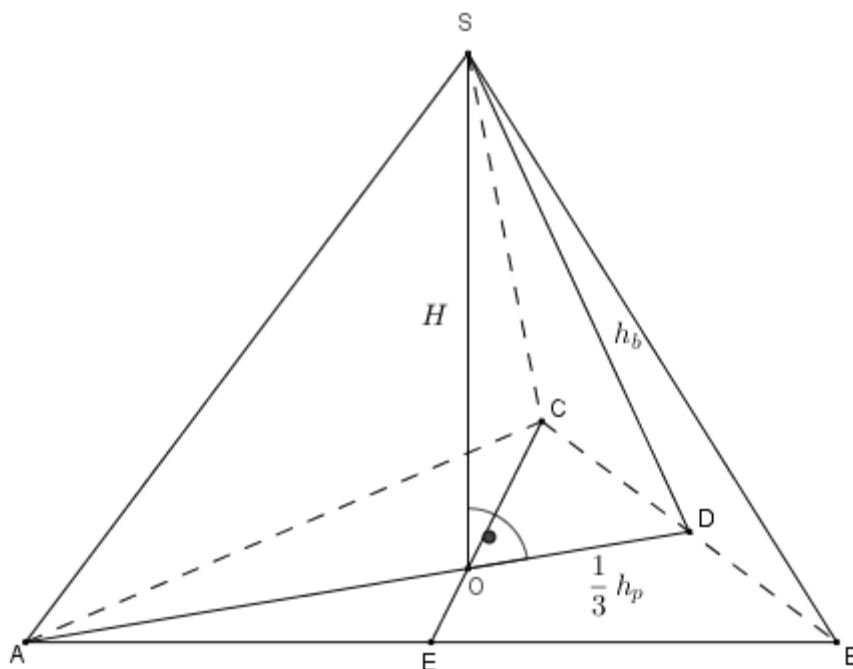
Za stwierdzenie, że punkt M jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ENF , czyli:

$$|MN| = |EM| = |MF| = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{a-b}{2} \quad \text{- 1 pkt.}$$

Zadanie 8. (0-4)

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe $144\sqrt{3} \text{ dm}^2$, a pole jego powierzchni bocznej jest równe $96\sqrt{3} \text{ dm}^2$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Przykładowe rozwiązanie oraz schemat oceniania:



Obliczenie długości „a” krawędzi podstawy ostrosłupa :

$$P_p = 144\sqrt{3} - 96\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ [dm}^2\text{]}$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3},$$

$$a = 8\sqrt{3} - \mathbf{1 \text{ pkt.}}$$

Obliczenie długości wysokości ściany bocznej:

$$\frac{8\sqrt{3} \cdot h_b}{2} = \frac{96\sqrt{3}}{3}, h_b = 8 - \mathbf{1 \text{ pkt.}}$$

Obliczenie długości odcinka stanowiącego rzut prostokątny wysokości ściany bocznej na płaszczyznę

$$\text{podstawy : } \frac{1}{3}h_p = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 4$$

Obliczenie długości wysokości ostrosłupa:

$$H = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3} - \mathbf{1 \text{ pkt.}}$$

Obliczenie objętości ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 48\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 192 \text{ [dm}^3\text{]} - \mathbf{1 \text{ pkt.}}$$