# Wojewódzki Konkurs Matematyczny dla uczniów gimnazjów
# rok szkolny 2016/2017
# Etap II – etap rejonowy- klucz odpowiedzi

W kluczu przedstawiono przykładowe rozwiązania oraz prawidłowe odpowiedzi.

Za każdą inną poprawną metodę rozwiązania zadania uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów.

**Do kolejnego etapu kwalifikuje się uczeń, który uzyskał co najmniej 14 punktów.**

**Zadanie1. (0-2)**

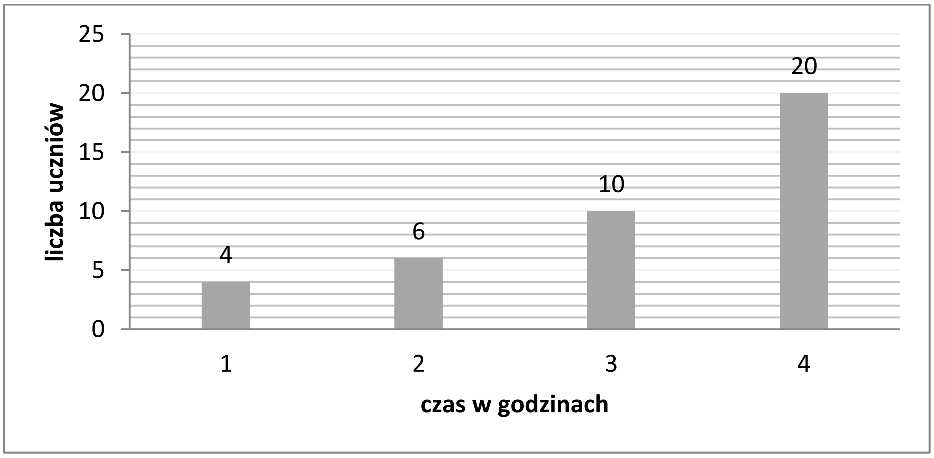
W poniższej tabeli przedstawiono wyniki sondażu przeprowadzonego w grupie uczniów, dotyczącego czasu przeznaczanego dziennie na odrabianie prac domowych i przygotowanie do lekcji.

| Czas w godzinach | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Liczba uczniów | 4 | 6 | 10 | 20 |

a) Oblicz średnią liczbę godzin, jaką uczniowie przeznaczają dziennie na odrabianie prac domowych i przygotowanie do lekcji.
b) Oblicz medianę liczby godzin, jaką uczniowie przeznaczają dziennie na odrabianie prac domowych i przygotowanie do lekcji.

## Przykładowe rozwiązanie:

Przykładowa ilustracja do treści zadania w postaci diagramu (niepunktowana):



a) $\bar{x} = \frac{4\cdot1+6\cdot2+10\cdot3+20\cdot4}{4+6+10+20} = \frac{4+12+30+80}{40} = \frac{126}{40} = 3\frac{3}{20} = \mathbf{3,15}$ **godz.** – za obliczenie średniej arytmetycznej **1 pkt**

b) $M = \frac{x_{20}+x_{21}}{2} = \frac{3+4}{2} = \mathbf{3,5}$ **godz.** – za obliczenie mediany **1 pkt**

**Zadanie 2. (0-2)**

**Błędem bezwzględnym** przybliżenia nazywamy wartość bezwzględną różnicy między wartością rzeczywistą, a wartością przybliżoną. **Błędem względnym** przybliżenia nazywamy iloraz błędu bezwzględnego do wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Olek wyszedł z domu o 7.45, czyli kwadrans przed rozpoczęciem lekcji. Sądził, że dotrze do szkoły punktualnie, ale spóźnił się 5 minut. Oblicz błąd względny, który popełnił Olek, szacując czas dojścia do szkoły.

**Przykładowe rozwiązanie:**

Błąd względny: $\frac{|\mathbf{20-15}|}{|\mathbf{20}|} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Uczeń otrzymuje **1 punkt** za:

zastosowanie poprawnego sposobu obliczenia błędu względnego

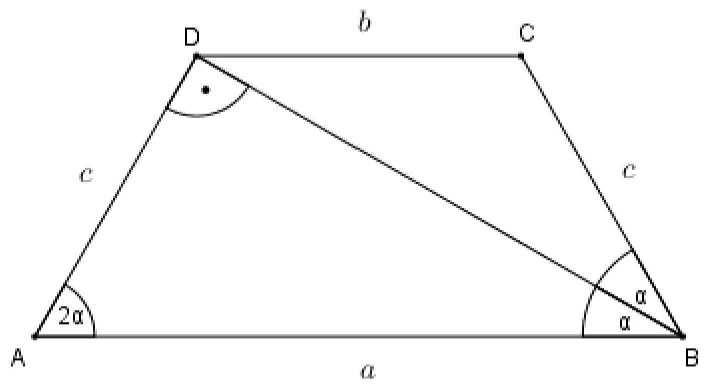
Uczeń otrzymuje **1 punkt** za:

obliczenie błędu względnego $\frac{1}{4}$.

**Zadanie 3. (0-4)**

W trapezie równoramiennym ABCD przekątna BD jest prostopadła do ramienia AD i zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego trapezu. Uzasadnij, że długość górnej podstawy jest równa długości ramienia i jest dwa razy krótsza od długości podstawy dolnej.

## Przykładowe rozwiązanie:



|∢ ABD| = |∢ CBD|  ( przekątna zawarta jest w dwusiecznej kąta) oraz

kąty: ABD i CDB są kątami naprzemianległymi, czyli |∢ ABD| = |∢ CDB| .

Z powyższych informacji wynika równość kątów: |∢ CDB| = | ∢ CBD| .

Zatem Δ BCD jest trójkątem równoramiennym, czyli $b = c$ (*****)

Trapez ABCD jest równoramienny, czyli $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle CBA|$ =2α

W Δ ABD  $2\alpha + \alpha + 90^0 = 180^0$

$\alpha = 30^0$

$|\sphericalangle DAB| = 60^0$

Trójkąt ABD jest połową trójkąta równobocznego, w którym AB jest bokiem, a AD jego połową ,

BD wysokością zatem $c = \frac{1}{2}a$ (******).

Z (*****) i (******) wynika, że $b = \frac{1}{2}a$ .

**I metoda:**

1. Za zapisanie równości miar kątów naprzemianległych: | ∢ABD| = |∢CDB|
   i stwierdzenie, że Δ BCD jest równoramienny, czyli $|BC| = |DC|$ **- 1 pkt**
2. Za obliczenie miar kątów Δ ADB: $2\alpha + \alpha + 90° = 180°$, więc $\alpha = 30°$ i $2\alpha = 60°$**- 1pkt**
3. Za zapisanie zależności pomiędzy długościami boków Δ ADB: $|AB| = 2 \cdot |AD|$ **- 1 pkt**
4. Za stwierdzenie, że $|DC| = |AD| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$ **- 1 pkt**

**II metoda:**

1. Za obliczenie miar kątów Δ ADB: $2\alpha + \alpha + 90° = 180°$, więc $\alpha = 30°$ i $2\alpha = 60°$ **- 1pkt**
2. Za obliczenie miar kątów Δ BDC: | ∢BCD|$= 180° - 2\alpha = 120°$,
   | ∢BDC|$= 180° - 120° - 30° = 30°$ i za stwierdzenie, że Δ BCD jest równoramienny,
   czyli $|BC| = |DC|$ **- 1 pkt**
3. Za zapisanie zależności pomiędzy długościami boków Δ ADB: $|AB| = 2 \cdot |AD|$ **- 1 pkt**
4. Za stwierdzenie, że $|DC| = |AD| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$ **- 1 pkt**

**Zadanie 4. (0-3)**

Cena biletu na premierę spektaklu wynosiła 15 zł. Gdy cenę biletu obniżono, okazało się, że na drugie przedstawienie przyszło o 50% widzów więcej niż na premierę tego przedstawienia, a uzyskana wówczas kwota ze sprzedaży biletów wzrosła o 25% .
Oblicz, o ile złotych obniżono cenę biletu? Oblicz, o ile procent obniżono cenę biletu?

**Przykładowe rozwiązanie:**

*x* – liczba sprzedanych biletów na premierę spektaklu (przed obniżką)

15*x* zł – kwota uzyskana ze sprzedaży biletów na przedstawienie premierowe

1,5*x* – liczba sprzedanych biletów na drugie przedstawienie (po obniżce ceny biletu)

$y$ zł – kwota o jaką obniżono cenę biletu na drugie przedstawienie

$(15–y)$ zł – cena biletu na drugie przedstawienie (po obniżce)

$1{,}5x \cdot (15–y) = 15x + 0{,}25 \cdot 15x$ / $:(1{,}5x)$

$15–y = 10+2{,}5$

$y = 2{,}5$ zł

$$\frac{2{,}5}{15}\cdot 100\% = \frac{25}{150}\cdot 100\% = 16\frac{2}{3}\%$$

Odp.: Cenę biletu obniżono o 2,50 zł (o $16\frac{2}{3}\%$).

Za prawidłowo ułożone równanie prowadzące do obliczenia wysokości obniżki ceny biletu – **1pkt**

Za obliczenie wysokości obniżki ceny biletu: 2,50 zł – **1 pkt**

Za obliczenie, o ile procent obniżono cenę biletu: $16\frac{2}{3}\%$ - **1pkt**

**Uwaga: Uznajemy odpowiedź podaną w postaci 16,(6)% lub ok. 16,7%**

## Zadanie 5. (0-3)

Czy z odcinków o długościach $\left(\frac{3}{2}\right)^{1998}$ cm , $\left(\frac{3}{2}\right)^{1999}$ cm i $\left(\frac{3}{2}\right)^{2000}$ cm można zbudować trójkąt **?**
Odpowiedź uzasadnij zapisując odpowiednie obliczenia.

**Przykładowe rozwiązanie:**

Warunek konstruowalności trójkąta:
Z trzech odcinków można zbudować trójkąt tylko wtedy, gdy długość każdego z tych odcinków jest mniejsza niż suma długości dwóch pozostałych odcinków.

Ponieważ wystarczy porównać sumę długości dwóch krótszych odcinków z długością najdłuższego odcinka, zapisujemy:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1998} + \left(\frac{3}{2}\right)^{1999} > \left(\frac{3}{2}\right)^{2000}$$

(za zapisanie nierówności trójkąta – **1pkt)**

Przekształcamy sumę potęg na iloczyn:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1998} + \left(\frac{3}{2}\right)^{1999} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1998} \cdot \left(1+\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1998} \cdot \frac{5}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1998} \cdot \frac{10}{4}$$

W celu porównania stron nierówności zapisujemy potęgę o wykładniku 2000 w postaci potęgi o wykładniku 1998:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2000} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1998} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1998} \cdot \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1998} \cdot \frac{10}{4} > \left(\frac{3}{2}\right)^{1998} \cdot \frac{9}{4}$$ ( za przekształcenie nierówności – **1 pkt)**

Zatem $\left(\frac{3}{2}\right)^{1998} + \left(\frac{3}{2}\right)^{1999} > \left(\frac{3}{2}\right)^{2000}$,

czyli z podanych odcinków można z budować trójkąt ( za zapisanie wniosku – **1 pkt)**

**Zadanie 6. (0-3)**

Rozwiąż układ równań w zbiorze liczb rzeczywistych.

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2yz = 100 \\ 2xy - z^2 = 100 \end{cases}$$

**Przykładowe rozwiązanie:**

$$\begin{cases} (1) x^2 + 2y^2 - 2yz = 100 \\ (2) 2xy - z^2 = 100 \end{cases}$$

Równania odejmujemy stronami

$x^2 + 2y^2 - 2yz - 2xy + z^2 = 0$

**(*)** $x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 = 0$

$(x-y)^2 + (y-z)^2 = 0$ (**1pkt** za doprowadzenie równania **(*)** do postaci sumy kwadratów różnic dwóch wyrażeń )

Oba składniki sumy są nieujemne, to znaczy, że każdy musi mieć wartość równą zero.
Stąd wynika, że
$x - y =$ oraz $y - z = 0$, czyli
$x = y$ i $y = z$, stąd x =y = z (**1pkt** za wnioskowanie o równości wszystkich niewiadomych)

Podstawiając do równania **(2)** otrzymujemy:

$2x^2 - x^2 = 100$

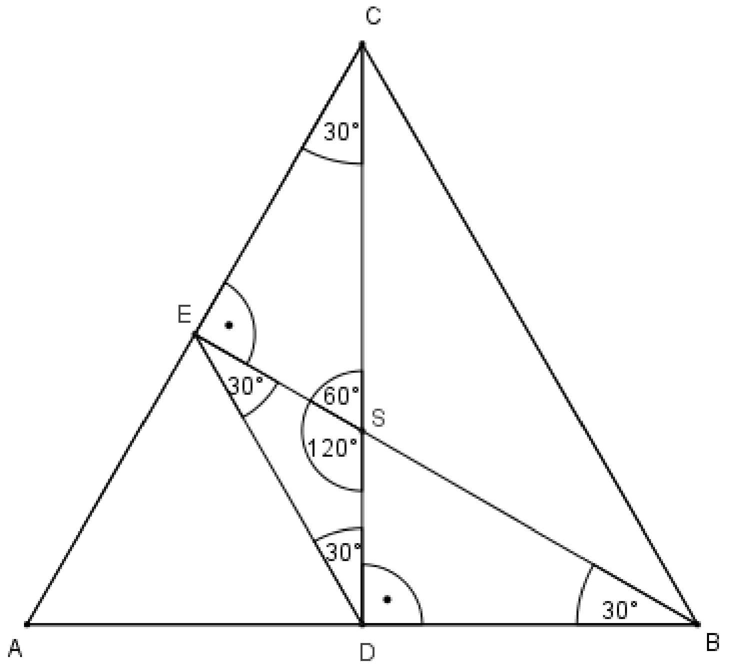
$x^2 = 100$

stąd $x = 10$ lub $x = -10$
Zatem:
$x = 10$ , y = 10 , $z = 10$
lub $x = -10$, $y = -10$ , $z = -10$ (**1pkt** za obliczenie wartości niewiadomych $x$, $y$ i $z$)

**Zadanie 7. (0-3)**

W trójkącie równobocznym ABC wysokości CD i BE przecięły się w punkcie S.
Wykaż, że trójkąt DSE jest podobny do trójkąta BDE.

**Przykładowe rozwiązanie:**




1. Wysokości trójkąta równobocznego są zawarte w dwusiecznych kątów wewnętrznych tego trójkąta, stąd $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle DCA| = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.
2. Wysokości trójkąta są poprowadzone pod kątem prostym do boku, stąd $|\sphericalangle CES| = |\sphericalangle CDB| = 90°$.
3. $|\sphericalangle ESC| = 180° - 90° - 30° = 60°$.
4. $\sphericalangle DSE$ jest przyległy do $\sphericalangle ESC$, zatem $|\sphericalangle DSE| = 180° - 60° = 120°$.
5. Wysokości trójkąta równobocznego dzielą się w stosunku $2 : 1$, stąd $|ES| = |DS|$ i trójkąt $DSE$ jest równoramienny, więc $|\sphericalangle DES| = |\sphericalangle EDS| = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$.
6. $|\sphericalangle BDE| = 90° + 30° = 120°$.
7. Kąty wewnętrzne trójkątów $DSE$ oraz $BDE$ są równe: $30°, 30°, 120°$ - zatem trójkąty te są podobne na podstawie cechy podobieństwa – *kąt, kąt, kąt*.

1.Obliczenie miar kątów trójkąta $DSE$: $|\sphericalangle DSE| = 120°$, $|\sphericalangle DES| = |\sphericalangle SDE| = 30°$ – **1 pkt**

2.Obliczenie miar kątów trójkąta $BDE$: $|\sphericalangle BDE| = 120°$, $|\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle DBE| = 30°$ – **1 pkt**

3.Za stwierdzenie, że trójkąty $DSE$ i $BDE$ są podobne na podstawie cechy *kąt, kąt, kąt* – **1pkt.**